Tentamen Complexe Analyse
08/02/06, 14.00–17.00 uur

1. Is de functie $f(z) = x^2 + iy^3$, $z = x + iy$, holomorf op $\mathbb{C}$? Beredeneer het antwoord.

2. Geef de definitie van de convergentiestraal van de complexe machtreeks
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$
Bereken de eerste drie termen van de machtreeksontwikkeling rond $z = 0$ van
$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{z^2 - 1}.$$
Bepaal de convergentiestraal van deze reeks (zonder lim sup argumenten te gebruiken).

3. Bepaal de volgende integraal
$$\int_{1+i}^{4+2i} \left(z + \frac{1}{z^2} \right) dz,$$
waarbij de punten $1 + i$ en $4 + 2i$ verbonden worden door de kromme $z = x + iy$ met $y = \sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 4$.

4. Bepaal de maximum modulus van de functie $z^2 - 1$ voor $|z| \leq 1$. Beargumenteer het antwoord.

5. Bepaal met behulp van residuenrekening de volgende integraal
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\cos\theta} \, d\theta.$$
Aanwijzing: Herschrijf $\cos\theta$ met behulp van e-machten en pas op de integraal vervolgens de substitutie $z = e^{i\theta}$ toe.

6. Bepaal met behulp van residuenrekening de volgende oneigenlijke integraal
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} \, dx.$$